1986 ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

COMMUNE AUX DEUX OPTIONS **DURÉE : 1 HEURE**

Dans tout le problème n désigne un entier supérieur ou égal à 1, u_n est le terme général d'une série convergente donnée ; on note :

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k, \quad U = \sum_{k=1}^{\infty} u_k, \quad R_n = U - U_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$$

u'_n étant une série associée à u_n, les notations correspondantes sont : U'_n, U', R'_n. Il existe d'autre part une fonction réelle f décroissante sur $[1,+\infty[$ telle que : $u_n = f(n)$; on pose $I_n = \int_n^{+\infty} f(x)dx$.

Les parties I, II, III sont indépendantes.

I

Soit $u_n = \dfrac{1}{(\sqrt{n}+1)^3}$; $f(x) = \dfrac{1}{(\sqrt{x}+1)^3}$

1. a) Calculer I_n et $a_n = I_n - I_{n+1}$; démontrer que u_n et a_n sont des infiniment petits équivalents lorsque n tend vers l'infini.

   b) Démontrer que : $I_{n+1} < R_n < I_n$ (on pourra s'aider d'une représentation graphique simplifiée de f).

2. Calculer, à une unité près, l'entier N minimum tel que : $R_N < 10^{-3}$.

   Calculer R_N à 10^{-5} près. Evaluer de même a_N à 10^{-6} près.

3. On pose : $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = I_1 + \sum_{n=1}^{\infty} u'_n$; $u'_n = \left(1 - \dfrac{a_n}{u_n}\right) u_n$

   a) Vérifier que : $\left|1 - \dfrac{a_n}{u_n}\right| < \dfrac{2}{\sqrt{n}}$

   b) Démontrer que : $|R'_n| < I'_n = \displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{2\,dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^3}$

   En déduire une borne supérieure de l'ensemble des nombres n tels que : $|R'_n| < 10^{-3}$

   Comparer le nombre obtenu avec N de 2-2.

   Conclusion quant au calcul éventuel de U ?

II

Dans cette partie, on considère : $u_n = \dfrac{1}{n^2+1}$; $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

1. Vérifier que :

$$\frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \frac{n-3}{n(n+1)(n+2)(n^2+1)}.$$

2. On pose $u'_n = \dfrac{n-3}{n(n+1)(n+2)(n^2+1)}$.

   Calculer U - U'.

3. a) Démontrer que pour $n \geqslant 3$: $0 < R'_n < \dfrac{1}{3n^3}$.

   En déduire que le calcul de U à 10^{-2} près par défaut se ramène au calcul de : $u'_1 + u'_2 + u'_3 + u'_4$.

   Calculer U à 10^{-2} et 10^{-3} près par défaut.

   b) Evaluer le nombre de termes que l'on aurait dû sommer directement dans la série (u_n) pour obtenir U à 10^{-2} et à 10^{-3} près par défaut. Conclusion ?

III

On prend dans cette partie : $u_n = \dfrac{1}{n^3+1}$.

1. On admet la formule :

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \frac{3}{n(n+1)(n+2)(n+3)} + \frac{11}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} + u'_n \quad \text{avec}$$

$$u'_n = \frac{49n^2 + 14n - 35}{(n^3+1)n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}.$$

En majorant convenablement R'_n, estimer le nombre de termes de (u'_n) suffisants pour calculer U' à 10^{-4} près.

2. Calculer U' puis U à 10^{-4} près.